Valovirta

Valovirta (tunnus **Φ**) kuvaa kuinka paljon valonlähde säteilee tiettyyn avaruuskulmaan. Valovirran SI-järjestelmän mukainen mittayksikkö on luumen.

Valovoima kuvaa valon lähteen intensiteettiä eli voimakkuutta ja sen yksikkö on kandela.

Valaistusvoimakkuus määräytyy tietylle pinta-alalle lankeavasta valovirrasta.

Valovoima

Valovoima (tunnus **I**) kuvaa valon lähteen intensiteettiä eli voimakkuutta. Valovoima kertoo valovirran avaruuskulmaa kohti. Valovoiman SI-järjestelmän mukainen mittayksikkö on kandela (cd).

Valovirta, jonka yksikkö on luumen, puolestaan kuvaa kuinka paljon näkyvää valoa valonlähde säteilee kokonaisuudessaan.

Luumen

Luumen (toisinaan **lumen**, tunnus **lm**) on SI-järjestelmän mukainen yksikkö valovirralle. Se on valon määrä, jonka valovoimaltaan kandelan valonlähde säteilee steradiaanin avaruuskulmaan. Toisin sanoen valon määrä, joka lankeaa esim. metrin päästä kartion pohjalle, jonka (pallomainen) pinta-ala on neliömetri.

1 lm = 1 cd · sr

Kandela

Kandela (**cd**) on SI-järjestelmän mukainen mittayksikkö valon intensiteetille eli valon voimakkuudelle eli valovoimalle. Yksi kandela on sellaisen valonlähteen valovoima, joka lähettää tiettyyn suuntaan monokromaattista taajuudeltaan 540 x 10^{12} hertsin valosäteilyä 1/683 watin säteilyteholla steradiaania kohden. 1 kandela vastaa suurin piirtein tavallisen kynttilän kirkkautta.

Yksiköt valovoimalle ja valovirralle ovat tarpeen, koska fysikaalinen säteilyintensiteetti (yksikkö watti/steradiaani) ja säteilyteho (yksikkö watti) eivät kuvaa ihmisen havaitsemaa valon voimakkuutta vaan ihmisen silmän herkkyys säteilylle riippuu sen aallonpituudesta (vrt. äänenvoimakkuus). Lisäksi herää kysymys, miten eriväristen valonlähteiden intensiteettejä olisi vertailtava. Valaistukseen liittyvät yksiköt on viime kädessä määriteltävä sopimuksenvaraisesti. Koehenkilöillä tehtyjen mittausten perusteella on muodostettu ns. V(λ) -funktio, joka kuvaa keskiverto ihmissilmän herkkyyttä valolle aallonpituuden funktiona. Funktion kuvaaja muistuttaa kellokäyrää, ja sen huippu on 555 nanometrin kohdalla (jolloin taajuus on em. määritelmässä esiintyvä 540 x 10^{12} Hz). V(λ) -funktion määrittelystä vastaa Kansainvälinen valaistuskomissio CIE.

Luksi

Luksi (tunnus **lx**) on SI-järjestelmän mukainen yksikkö valaistusvoimakkuudelle. Kappale on luksin valaistuksessa, jos sille lankeaa neliömetrin pinta-alalle luumenin valovirta:

$$1\ \mathrm{lx} = 1\ \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}$$

Avaruuskulma

Avaruuskulma (tunnus **Ω**) on kolmiulotteinen kulma.

Geometrisesti avaruuskulman suuruutta mitataan SI-järjestelmässä steradiaaneina (sr). Avaruuskulma steradiaaneina on yhtä suuri kuin avaruuskulman määrittelevän kartion pallomaisen pohjan pinta-ala pallon säteen ollessa 1. Täysi avaruuskulma on 4п sr.

Kaksiulotteista kulmaa nimitetään tasokulmaksi.

Steradiaani

Steradiaani (tunnus **sr**) on SI-järjestelmän mukainen avaruuskulman suuruuden mittayksikkö.

Täysi avaruuskulma on 4π sr.

Geometrisesti avaruuskulman suuruus steradiaaneina ilmoitettuna on yhtä suuri kuin avaruuskulman määrittelevän kartion pallomaisen pohjan pinta-ala pallon säteen ollessa 1.

Tasokulma

Tasokulma (tunnus **ɑ**) on kaksiulotteinen kulma.

Geometrisesti tasokulman suuruutta mitataan SI-järjestelmässä radiaaneina (rad). Tasokulma radiaaneina on yhtä suuri kuin kulman määrittelevän ympyräsektorin kaaren pituus ympyrän säteen ollessa 1. Täysi avaruuskulma on 2п rad. Radiaani on etenkin matematiikassa käytetty kulman yksikkö.

Muita kulman yksikköjä ovat muun muassa aste (°), joka on 1/360 ympyrästä, sekä tykistön piiru ja uusaste eli gooni. Kulma jakaantuu edelleen 60 kulmaminuuttiin ('), joka jakaantuu 60 kulmasekuntiin (", SI-järjestelmän lisäyksikkö).

Kolmiulotteista kulmaa nimitetään avaruuskulmaksi.

Monokromaattinen

Monokromaattinen valo tarkoittaa sitä että valo sisältää vain yhden aallonpituuden, joten myös valon taajuusalue on kapea. Katsottaessa monokromaattinen valo sisältää vain yhden sävyn. Esimerkiksi laser-valo on lähellä monokromaattista valoa. Sävy riippuu valoa lähettävän valolähteen ominaisuuksista.

Kynttilä

Kynttilä on yleensä vahasta valmistettu valonlähde, jonka keskellä on sydänlanka. Langan kärjessä vaha palaa valoa tuottavalla liekillä. Nykyään kynttilässä käytetään yleisimmin steariinia.

Kynttilät olivat yleisiä valonlähteitä ennen kotien sähköistämistä ja öljylamppuja. Paikallisista olosuhteista johtuen kynttilät olivat yleisempiä Pohjois-Euroopassa ja oliiviöljylamput yleisempiä Välimeren maissa.

Nykyään kynttilöitä käytetään lähinnä tunnelman luojana, joissakin uskonnollisissa perinnetilaisuuksissa sekä varavalaistuksena sähkökatkon varalle.

Kynttilää (ns. normaalikynttilää) on käytetty valovoiman mittana, ja nykyään käytössä oleva yksikkö kandela vastaa suurin piirtein tavallista kynttilää. Kynttilän tuottama valovirta on suuruusluokkaa 10 lumen, joka vastaa osapuilleen 1 W hehkulampun valovirtaa.

Steariini

Steariini on yleisimmin kynttilöissä käytetty valmistusaine.

Sana steariini juontaa juurensa kreikan sanasta *stear* joka tarkoittaa talia. Steariini on steariinihapon glyseriiniesteri. Se on rasvaa jonka sulamispiste on 72 celsiusastetta. Mitä enemmän rasvassa on steariinia, sitä kiintempää sen koostumus on normaaleissa lämpötiloissa.

Laser

Valkoiselle pinnalle muodostunut punainen valopiste on Helium-Neon-laserin aikaansaama.

Laser (engl. *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) on laite, joka tuottaa koherenttia valoa. Toiminta perustuu stimuloiduksi emissioksi kutsuttuun kvanttimekaaniseen ilmiöön. Laseroiva väliaine toimii optisena vahvistimena vain tietylle aallonpituudelle. Lisäksi väliaine on optisen resonaattorin sisällä. Näin saadaan tuotettua koherenttia valoa. Usein valo on kollimoitua ja monokromaattista.

Käytännössä laserissa valoa muodostuu kahden toisiaan kohtisuorassa vastakkain olevan peilin väliin. Toinen peileistä päästää pienen osan valosta ulos, josta muodostuu varsinainen laser-säde. Kulkiessaan edestakaisin peilein välissä valosta poistuvat erisuuntaiset ja -vaiheiset komponentit.

Valoa vahvistavaa maseria sanotaan laseriksi.

Lasertyyppejä

- Kaasulaserit
    - HeNe-laser (aallonpituudet 543 nm ja 633 nm)
    - Argon(-Ion) laser (aallonpituudet 458 nm, 488 nm tai 514,5 nm)
    - hiilidioksidilaserit - käytetään teollisuudessa leikkaamiseen ja hitsaamiseen, voivat tuottaa jopa 100 kW:n tehon. Nykyään termi CO_2-laser on sikäli harhaanjohtava, että kaasuseoksessa on hiilidioksidia vain kymmenkunta prosenttia. Suurin piirtein saman verran on typpeä, ja loput heliumia. Tarkan seoksen määrittelee leikkauslaitteen valmistaja.
    - hiilimonoksidilaserit - vaativat jäähdytystä, voivat tuottaa jopa 500 kW:n tehon
- Eksimeerilaserit, tuottavat ultraviolettia valoa. Käytetään puolijohteiden valmistukseen ja LASIK-silmäkirurgiassa. Aallonpituuksia 157 nm (F_2), 193 nm (ArF), 222 nm (KrCl), 248 nm (KrF), 308 nm (XeCl), 351 nm (XeF).
- Dermatologiassa usein käytetään usein lasereita esim. tatuointien ja syntymämerkkien poistoon. Tyypillisiä lasereita ovat mm. rubiinilaser (694 nm), aleksandriittilaser (755 nm), pulssitettu diodilaserhila (810 nm), Nd:YAG (1064 nm), Ho:YAG (2090 nm) ja Er:YAG (2940 nm).
- puolijohdelaserit,
    - pienet: käytetään laserosoittimissa, lasertulostimissa ja CD/DVD-soittimissa.
    - suuremmat: teollisuuden leikkaus- ja hitsauskäyttöön on olemassa jopa 10 kW:n tehoisia diodilasereita.
- ulkoista resonaattoria käyttävät puolijohdelaserit, jotka tuottavat suuria tehoja hyvällä säteenlaadulla. Lisäksi säteilyn aallonpituuden viivanleveys on kapea ja aallonpituutta voidaan säätää. Vaihtoehtoisesti voidaan tuottaa erittäin lyhyitä laserpulsseja.
- Väriainelaserit
- kvanttikaskadilaserit
- neodyymirikastetut YAG-laserit, infrapuna-alueella toimivia suurteholasereita joilla hitsataan, leikataan tai merkitään metalleja tai muita materiaaleja.

- ytterbium-rikastetut laserit, esimerkiksi Yb:YAG, Yb:KGW, Yb:KYW, Yb:SYS, Yb:BOYS, Yb:CaF2, tai Yb-rikastettuja laseja (esim. valokuidut). Toimivat tavallisesti 1020-1050 nm aallonpituuksilla. Saavutetaan hyvä hyötysuhde ja suuri teho. Yb:YAG-laserilla saavutetaan suurin teho erittäin lyhyillä pulsseilla.
- erbium-rikastettu YAG, 1645 nm
- tulium-rikastettu YAG, 2015 nm
- Holmium YAG, 2096 nm, infrapuna-alueen tehokas laser, jonka teho absorboituu vesipitoisiin kudoksiin millimetrin paksuisella alueella. Laseria käytetään tavallisesti pulssilaserina ja teho ohjataan optista kuitua pitkin kohteeseen. Laseria käytetään mm. nivelten päällystämiseen, karieksen poistamiseen hampaista, syöpäsolujen tuhoamiseen ja munuais- ja virtsakivien tuhoamiseen.

- Titaani-rikastetut safiirilaserit, viritettävä infrapuna-alueen laser, käytetään spektroskopiassa.
- Erbium-rikastetut kuitulaserit, käytetään optiseen kuituun valmistettuna optisen tietoliikenteen vahvistimina.

Laserin käyttöturvallisuus

Jo pienen tehon (~1 mW) laserin säteily voi aiheuttaa näkövaurioita. Aallonpituuksilla joilla sarveiskalvo ja linssi kohdistavat hyvin valoa, koherentti ja kapea lasersäde voi fokusoitua hyvin pienelle verkkokalvon alueelle aiheuttaen nopeasti kudosvaurioita. Laserit on turvallisuusluokiteltu luokkiin I-IV, jossa luokka I merkitsee turvallista ja luokka IV tilannetta, jossa jopa sironnut säteily voi aiheuttaa silmä- tai ihovaurioita. Kulutuselektroniikan laserit kuuluvat tavallisesti luokkiin I ja II.

Laser populaarikulttuurissa

Populaarikulttuurissa ja erityisesti science fictionissa ja toimintaelokuvissa laser esitetään usein virheellisesti. Toisin kuin esimerkiksi Star Wars-elokuvissa nähdään, lasersäde ei koskaan näy tyhjiössä (avaruudessa). Säde on mahdollista nähdä vain, mikäli jokin väliaine kuten sumu tai pöly sirottaa sen kohti katsojaa. Intensiteetiltään suuri lasersäde näkyy ilmassa Rayleigh- tai Raman-sironnan vuoksi.

Lisäksi useimmiten lasersäteiden eteneminen avaruudessa on niin hidasta, että säteen etenemisen voi nähdä. Tämä muistuttaa perinteisen suorasuuntausammuksen etenemistä. Todellisuudessa säde etenee valonnopeudella, joten tulituksen kohde näkee säteen juuri osuman hetkellä.

Joissakin toimintaelokuvissa on laserilla toteutettuja turvajärjestelmiä, jotka sankari saa näkymään käyttäen jotakin pölyä tms. ja ohittaa järjestelmät tyypillisesti peilejä käyttäen. Todellisuudessa on halvempaa ja tavallisempaa toteuttaa turvajärjestelmä infrapuna-alueen lasereilla kuin näkyvän valon lasereilla.

Tästä eteenpäin on kurssiin kuulumatonta materiaalia. Tutustu kuitenkin näihinkin.

Pinta-ala

Pinta-ala (tunnus **A**) on alueen koon mitta, pinta-ala kertoo kuinka suuri jokin kuvio on alueeltaan.

Yksiköitä

Pinta-alan SI-johdettu yksikkö on neliömetri (m^2). Isompiin alueisiin käytetään usein neliökilometriä (km^2). Viljelysmaata ja metsää mitataan usein **hehtaareissa** (1 ha = 0,01 km^2). Se on toisen maa-alan mitan, **aarin** (a), moninkerta – nimensä mukaisesti (*heht(o)*aari) sata aaria. Aaria ei enää juurikaan käytetä.

Kaavoja

Joitain yleisiä kaavoja kaksiuloitteisten kappaleiden pinta-alan (A) määrittämiseen:

- Neliö tai muu suorakulmio: $A = l \cdot w$ (jossa l on pituus ja w on leveys); neliön tapauksessa l = w.
- Ympyrä: $A = \pi \cdot r^2$ (jossa r on säde)
- Kolmio: $A = B \cdot h / 2$ (jossa B on kannan leveys ja h on etäisyys janasta). Tätä kaavaa voidaan käyttää jos korkeus h on tunnettu. Jos kaikkien kolmen sivun pituudet ovat tunnettuja, voidaan käyttää Heronin kaavaa $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, jossa a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet ja s = (a + b + c)/2 eli puolet kolmion piiristä.

Joidenkin kolmiulotteisten kappaleiden pinta-alojen laskukaavoja:

- Pallo: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, missä r on pallon säde

Kolmio

Kolmio eli **kolmikulmio** on yksi geometrian perusmuodoista. Kaikki mahdolliset kolmiot voidaan muodostaa siten, että tasolle piirretään kolme pistettä, jotka yhdistetään toisiinsa janoilla. Näin saatuja janoja kutsutaan kolmion sivuiksi.

Minkä hyvänsä kolmen pisteen muodostama kolmio määrittää tason avaruudessa. Kolmio on myös ainoa monikulmio, joka aina määrittää avaruudessa tason. Kolmio on siten yksi tasokuvioista.

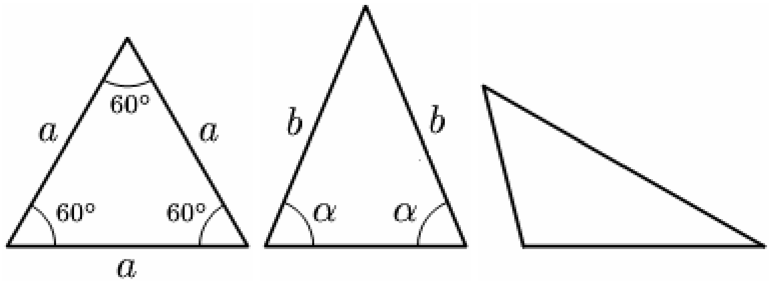
Kolmiot tyypeittäin

Kolmiot voidaan luokitella sivujen suhteellisten pituuksien mukaan seuraavasti:

- **Tasasivuisessa kolmiossa** kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tästä seuraa myös se, että kaikki tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60 asteen suuruisia. Se on siis myös säännöllinen monikulmio.

- **Tasakylkisessä kolmiossa** on kaksi yhtä pitkää sivua. Tällaisessa kolmiossa on siis myös kaksi yhtäsuurta kulmaa. Eripituista sivua kutsutaan tällöin kolmion kannaksi.

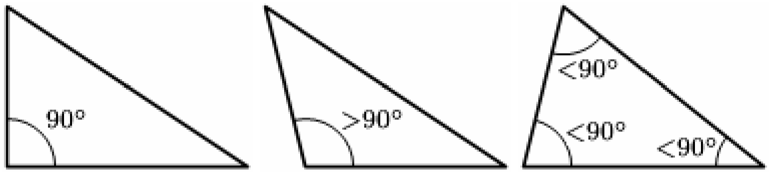
- **Epäsäännöllisessä kolmiossa** kaikki sivut ovat eripituisia. Myös kaikki kulmat ovat erisuuruisia.



Tasasivuinen Tasakylkinen Epäsäännöllinen

Kolmiot voidaan luokitella myös kulmien perusteella.

- **Suorakulmaisessa kolmiossa** on yksi kulma, joka on tasan 90° suuruinen. Suoraakulmaa vastapäätä olevaa sivua kutsutaan *hypotenuusaksi* ja suorankulman viereisiä sivuja *kateeteiksi*.
- **Tylppäkulmaisesa kolmiossa** on yksi kulma, joka on suurempi kuin 90°.
- **Teräväkulmaisessa kolmiossa** kaikki kulmat ovat alle 90° suuruisia.



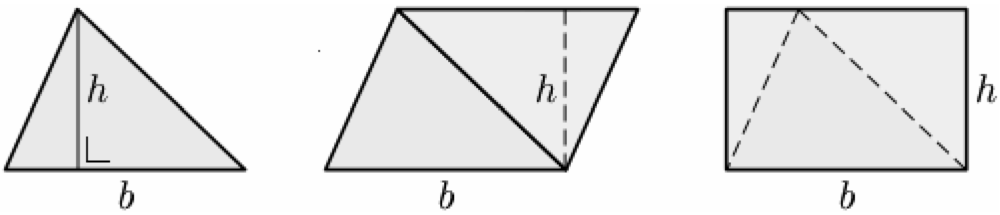
Suorakulmainen Tylppä Terävä

Kolmion pinta-alan laskeminen

Kolmion pinta-alan laskeminen on yksinkertainen ongelma, joka tulee usein vastaan erilaisissa tilanteissa. On olemassa useita eri ratkaisutapoja riippuen siitä, mitä kolmiosta tiedetään. Ohessa on eräitä usein käytettyjä kaavoja pinta-alan laskemista varten.

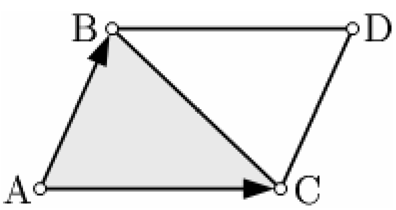
Geometrinen menetelmä

Kolmion pinta-ala S voidaan laskea kaavalla $S = ½bh$, jossa b (kanta) on yhden satunnaisesti valitun sivun pituus ja h (korkeus) on kannan etäisyys vastapäisestä kärjestä. Tämä voidaan esittää oheisella piirustuksella.



Kolmio muutetaan aluksi nelikulmioksi, jolla on kaksinkertainen pinta-ala kolmioon nähden. Seuraavaksi tämä muunnetaan suorakulmioksi.

Annetun kolmion pinta-alan selvittämiseksi (kuvassa vihreällä) tehdään ensin alkuperäisestä kolmiosta kopio (sininen), kierretään se 180° ja liitetään osat yhteen. Näin saadusta säännöllisestä nelikulmiosta leikataan palanen irti ja liiitetään se nelikulmion toiselle puolelle, jolloin saadaan suorakulmio. Koska suorakulmion ala on bh, annetun kolmion pinta-alan täytyy olla $½bh$.



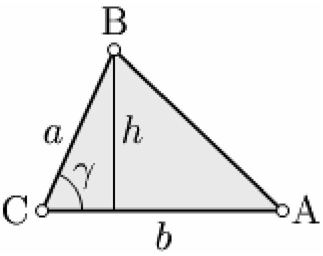
Nelikulmion pinta-ala ja kahden vektorin ristitulot ovat yhtäsuuret.

Vektorien avulla

Nelikulmion pinta-ala voidaan laskea myös vektorien avulla.

Jos *AB* ja *AC* ovat vektoreita, jotka osoittavat A:sta B:hen ja A:sta C:en, nelikulmion ABDC pinta-ala on |*AB* × *AC*|, eli vektorien *AB* ja *AC* ristitulon suuruus. Lisäksi |*AB* × *AC*| = |*h* × *AC*|, missä *h* on korkeus *h* vektorina.

Kolmion ABC pinta-ala on puolet tästä, eli $S = ½|AB \times AC|$.



Korkeuden *h* selvittäminen trigonometrian avulla.

Trigonometrian avulla

Kolmion korkeus voidaan saada selville trigonometrian avulla. Jos käytämme vasemmalla olevan kuvan merkintöjä, korkeus on $h = a \sin \gamma$. Kun tämä sijoitetaan yllä johdettuun kaavaan $S = ½bh$, voidaan kolmion pinta-ala ilmoittaa muodossa $S = ½ab \sin \gamma$.

Nelikulmion pinta-ala on luonnollisesti myös $ab \sin \gamma$.

Koordinaattien avulla

Jos kärki A sijaitsee karteesisen koordinaattijärjestelmän origossa (0, 0), ja kahden muun kärjen koordinaatit on annettu muodossa $B = (x_1, y_1)$ ja $C = (x_2, y_2)$, niin pinta-ala *S* on puolet determinantin

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

absoluuttisesta arvosta, tai $S = ½\,|x_1y_2 - x_2y_1|$.

Heronin kaavaa käyttäen

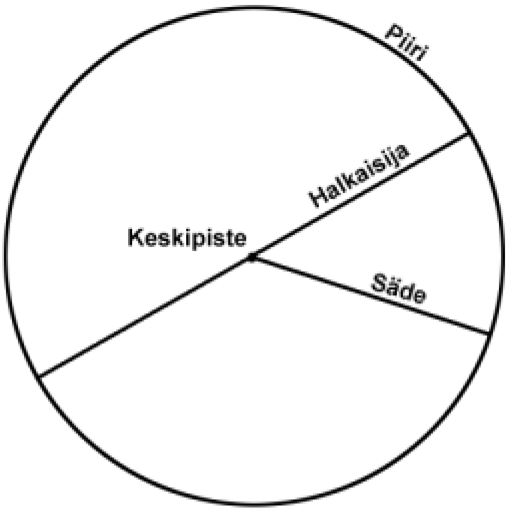
S voidaan laskea myös Heronin kaavan avulla:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

missä $s = ½\,(a + b + c)$ eli puolet kolmion ympärysmitasta.

Ympyrä

Ympyrä on geometriassa kaikkien niiden tason pisteiden joukko, joiden etäisyys annetusta pisteestä on tietty vakio.



Ympyrän kehän pituus ja ympyrän pinta-ala

Ympyrän kehän (piirin) pituus l saadaan kaavasta:

$l = 2\pi r$, missä r on ympyrän säde

Ympyrän pinta-ala A saadaan kaavasta: $A = \pi r^2$; , missä r on ympyrän säde tai vastaavasti $A = \frac{\pi}{4}d^2$; missä d on ympyrän halkaisija Niistä kuvioista, joilla on annettu piirin pituus, suurin pinta-ala on ympyrällä.

Ympyrän yhtälö kaksiuloitteisessa reaaliavaruudessa R²

Olkoon piste (x_0,y_0) ympyrän keskipiste, r ympyrän säde ja piste (x,y) mikä tahansa koordinaatiston piste. Jokaisen ympyrän kehän pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on ympyrän säde eli r. Kuvitellaan suorakulmainen kolmio, jonka terävinä kulmina on pisteet (x_0,y_0) ja (x,y). Kolmion hypotenuusan pituus eli pisteiden etäisyys on Pythagoraan lauseen mukaan

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Koska etäisyyden tulee olla r, saadaan

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Korottamalla yhtälö puolittain toiseen saadaan hieman kätevämpi muoto

$$r^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

Josta saadaan poistamlla sulut potensseista ympyrän yhtälön normaalimuoto:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, jossa a, b, c ja r ovat reaalilukuja

Jos ympyrän keskipiste on pisteessä (0,0), ts. origossa, on ympyrän yhtälö

$$r^2 = x^2 + y^2$$

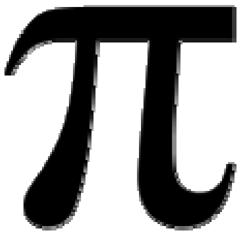
joka on parametrimuodossa:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Napakoordinaattiesitys origokeskeiselle ympyrälle on yksinkertaisesti: r = vakio

Kun ympyrän yhtälö tunnetaan, voidaan sen pinta-ala ja kehän pituus laskea myös integroimalla. Lisäksi voidaan johtaa kaavat pallon tilavuudelle ja pinta-alalle.

Pii (vakio)



Luku **pii** (merkitään pienellä kreikkalaisella ***π***-kirjaimella) on matemaattinen vakio, joka esiintyy monilla matematiikan ja fysiikan alueilla. Se tunnetaan myös nimillä **Arkhimedeen vakio** tai **Ludofin luku**.

Määritelmän mukaan on *π* yhtä kuin ympyrän kehän suhde halkaisijaan (euklidisessa geometriassa). Eukleideen Alkeet-teoksen luvussa XII todistetaan, että kahden ympyrän alan suhde on sama kuin niiden halkaisijoiden neliöiden suhde. Tästä seuraa, että ympyrän pinta-ala on vakio (=π/4) kertaa sen halkaisijan neliö. Pii on irrationaaliluku. Pii on myös transsendenttiluku, minkä todisti Ferdinand Lindemann vuonna 1882.

Piin historia

Yksi ensimmäisistä säällisistä *π*:n likiarvoista löytyy egyptiläisen matemaatikko Ahmosen laskutehtävälistoista, jotka löytyvät ns. Rhindin papyruksesta. Sen kuvaamaa laskukaavaa käyttäen saataisiin *π*:n arvoksi 3,16.

π:n likiarvo 100 desimaalin tarkkuudella on

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

Missään tuskin koskaan tarvitaan tarkempaa likiarvoa, sillä 40 desimaalia riittää määrittämään maailmankaikkeuden ympäryysmitan vetyatomin halkaisijan tarkkuudella. Myöskään piin desimaaleista ei ole löytynyt teoreettisesti mitään mielenkiintoista.

Luettelo piin laskukaavoista

Laskukaavoja piin määrittämiseksi algebrallisesti.

Pinta-alan laskeminen

Vietan kaava on vuodelta 1593 ja se perustuu ympyrän pinta-alan laskemiseen sen sisä- ja ulkopuolelle piirrettyjen säännöllisten monikulmioiden avulla:

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\ldots$$

Sarjoja

Leibnizin sarja vuodelta 1674:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Eulerin sarja vuodelta 1748:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Samankaltainen sarja:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Piillä on myös monia ketjumurtolukuesityksiä, kuten tämä:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \dots}}}}}}$$

Eräs mielenkiintoinen sarja on Wallisin tulo:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Joka voidaan kirjoittaa myös näin:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n)^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Tangentin käänteisfunktio

Edelliset sarjat kehittyvät piitä kohti varsin hitaasti. Nopeammin kehittyviä tangentin käänteisfunktion, eli arkustangentin, ominaisuuteen perustuvia laskukaavoja:

Machinin kaava vuodelta 1706:

$$\pi = 16\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Lehmerin kaava vuodelta 1938:

$$\pi = 88\tan^{-1}\left(\frac{1}{28}\right) + 8\tan^{-1}\left(\frac{1}{443}\right) - 20\tan^{-1}\left(\frac{1}{1393}\right) - 40\tan^{-1}\left(\frac{1}{11018}\right)$$

Kahdessa edellisessä käytetään sarjakehitelmää

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Modulaarifunktio

Modulaarifunktioiden ominaisuuksiin perustuvia piin laskukaavoja alettiin suosia 1900-luvulla:

Ramanujanin hypergeometrisiin funktioihin perustuva modulaarinen kaava vuodelta 1914:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(26390k + 1103)}{(4^{4k}k!^4)99^{4k}}$$

Chudnovskien vuonna 1989 valmistama entistäkin nopeammin suppeneva modulaarikaava:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(545140134k + 13591409)}{k!^3 (3k)!(640320^3)^{k+\frac{1}{2}}}$$

Iteraatioprosessi

Piin arvoa on selvitelty myös iteraatioprosessin kautta, eli laskemalla funktiolle arvo, ja käyttämällä saatua arvoa uudestaan samassa funktiossa.

Borweinin vuodelta 1989 tekemä iteraatio:

$$y_0 = \sqrt{2} - 1$$
$$y_n = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_{n-1}^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_{n-1}^4}}$$
$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$$
$$a_n = (1 + y_n)^4 a_{n-1} - 2^{2(n-1)+3} y_n \left(1 + y_n + y_n^2\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\pi}$$

Bailey onnistui parantamaan jo huikeaa suppenemistahtia omalla iteraatiokaavallaan:

$$y_0 = 5\left(\sqrt{5} - 2\right)$$
$$y_n = 25 / \left(\left(1 + \frac{2^{\frac{1}{5}}\beta}{\left(\beta\left(7 + \alpha + \sqrt{(7+\alpha)^2 - 4\beta^3}\right)\right)^{\frac{1}{5}}} + \frac{\left(\beta\left(7 + \alpha + \sqrt{(7+\alpha)^2 - 4\beta^3}\right)\right)}{2^{\frac{1}{5}}}\right.\right.$$

, jossa $\alpha = \left(2 - \frac{5}{y_{n-1}}\right)^2$ ja $\beta = -1 + \frac{5}{y_{n-1}}$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$
$$a_n = y_{n-1}^2 a_{n-1} - 5^{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(y_{n-1}^2 - 5\right) + \sqrt{y_{n-1}(y_{n-1}^2 - 2y_{n-1} + 5)}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\pi}$$

Bailey, Borwein ja Plouffe esittivät vuonna 1996 luvun π laskemiseen kaavan:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right).$$

Kaava sopii hyvin binäärilukujärjestelmää käyttävällä tietokoneella laskettavaksi. Sen avulla voidaan laskea suoraan haluttu numero piin esityksestä. Se on helppo implementoida (ei tarvita moninkertaisen tarkkuuden aritmetiikkaa). Suurta keskusmuistia ei myöskään tarvita. Suoritusaika riippuu lähes lineaarisesti haluttujen numeroiden lukumäärästä.

Tulitikkukoe

Matemaattisesti vaikeiden ja yleensä ehdottomasti tietokonepohjaisten kaavojen sijasta kukin voi itse havainnollistaa piin arvoa yksinkertaisella tulitikkukokeella. Siihen tarvitaan iso paperi, johon piirretään samansuuntaisia suoria sellaiselle etäisyydelle toisistaan, että tulitikku mahtuu juuri ja juuri olemaan poikittain suorien välissä koskematta kumpaakaan niistä. Tämä ei ole kuitenkaan välttämätöntä, kuten alla olevan kaavan tarkastelu osoittaa. Jos nimittäin suorien etäisyys on sama kuin tulitikun pituus supistuvat termit a ja c pois, muuten ne on otettava huomioon laskussa. Sitten pudotellaan mahdollisimman paljon tulitikkuja (huom. kaikkien tikkujen tulisi olla samanmittaisia) tarpeeksi korkealta paperille ja merkitään muistiin kaikki ne tikut, jotka leikkaavat jonkin paperille piirretyistä suorista. Muutaman tuhannen tikun jälkeen pii alkaa jo hahmottua ja se saadaan lasketuksi seuraavasta kaavasta:

$\pi \approx \frac{2cN}{aM}$, jossa

- c = tulitikun pituus
- a = suorien etäisyys toisistaan
- N = pudotettujen tulitikkujen määrä
- M = suoran leikkaavien tulitikkujen määrä.

Lauseen todistus on yksinkertainen ja se perustuu todennäköisyyslaskentaan ja geometriaan.